



TITLE:

# Volterra 型積分微分方程式に対する 一般化線形多段法の安定性について (数値計算アルゴリズムの研究)

AUTHOR(S):

萩原, 州; 鈴木, 千里

---

CITATION:

萩原, 州 ...[et al]. Volterra 型積分微分方程式に対する一般化線形多段法の安定性について(数値計算アルゴリズムの研究). 数理解析研究所講究録 1998, 1040: 45-52

ISSUE DATE:

1998-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/62039>

RIGHT:

## Volterra 型積分微分方程式に対する一般化線形多段法の安定性について

静岡理工大 大学院 萩原 州 ( Shu Hagiwara )

静岡理工大 理工学部 鈴木 千里 ( Chisato Suzuki )

### 1 はじめに

積分-微分方程式

$$(1) \quad y'(x) = F(x, y(x), \int_{x_0}^x K(x, s, y(s)) ds) \quad (x \geq x_0), \quad y(x_0) = y_0$$

は, 新しい変数  $v$  を導入することにより, 等価な系

$$\begin{cases} \text{(I)} & y'(x) = F(x, y(x), v(x)) \\ \text{(II)} & v(x) = \int_{x_0}^x K(x, s, y(s)) ds \end{cases}$$

を得る. さらに式 (II) において  $x$  を固定して考えるとき,

$$v(x) = \int_{x_0}^x v'(s) ds, \quad v(x_0) = 0$$

が得られ, これと式 (II) から

$$\int_{x_0}^x (v'(s) - K(x, s, y(s))) ds = 0$$

が成立する. 各  $x$  において, この式の微分形式をとることにより (1) と等価な微分方程式系

$$(2) \quad \begin{cases} y'(x) = F(x, y(x), v(x)), & y(x_0) = y_0 \\ v'(s) = K(x, s, y(s)), & (x \geq s \geq 0, x \geq x_0) \end{cases}$$

が得られる.

本資料では, 常微分方程式に対する一般化線形多段法を方程式系 (2) に適用し, 安定性解析を行い, 積分-微分方程式に対する有効な数値解法の提唱を試みる. 具体的には A 安定な 1 段 3 次公式, Stiff 安定な 2 段 5 次公式, 3 段 7 次公式を構成し, 既存の方法 [1,2,5] との比較を与える. 結果的に本方法が安定性と精度の観点において優れていることを示す. また解析結果は, 本アプローチによるスキムの安定性が常微分方程式に対する一般化線形多段法の安定性に強く依存していることを示す.

### 2 一般化線形多段法

#### 2.1 微分方程式からの準備

常微分方程式 (ODE) の初期値問題  $y' = f(x, y)$ ,  $y(x_0) = y_0$  に対する一般化線形多段法 (GLM 法) の公式をつぎのように与える.

$$(3) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i f_{n+i} + h\gamma f_{n+s} \\ y_{n+s} = \sum_{i=0}^k \hat{\alpha}_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^k \hat{\beta}_i f_{n+i} \end{cases}$$

ここで  $s$  は非整数の実数であり,  $x_n = x_0 + nh$ ,  $h$  は刻み幅,  $f_n \simeq f(x_n, y_n)$ ,  $y_n \simeq y(x_n)$ . 一般化線形多段法は非整数離散点  $s$  の導関数値  $f_{n+s}$  を利用するのが特徴であり,  $k$  段  $2k+1$  次の安定な公式をもつ [3]. また  $\gamma=0$  とすると式 (3) の第 2 式が不要となり, 通常用いられる線形多段法の公式に退化する.

数値的安定性を考察するために, テスト方程式  $y' = \lambda y$ ,  $y(x_0) = y_0$  に対して公式 (3) を適用すると次のスキム (ODE) を得る.

$$(4) \quad \begin{cases} \sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h\lambda \sum_{i=0}^k \beta_i y_{n+i} + h\lambda \gamma y_{n+s} \\ y_{n+s} = \sum_{i=0}^k \hat{\alpha}_i y_{n+i} + h\lambda \sum_{i=0}^k \hat{\beta}_i y_{n+i} \end{cases}$$

ここで  $\text{Re}\lambda < 0$  である. 上のスキムはシフト作用素  $E$  を用いることによって

$$\begin{cases} \rho(E)y_n = h\lambda\sigma(E)y_n + h\lambda\gamma y_{n+s} \\ y_{n+s} = \hat{\rho}(E)y_n + h\lambda\hat{\sigma}(E)y_n \end{cases}$$

のように簡単に表すことができる. ここで

$$\begin{aligned} \rho(E) &= \sum_{i=0}^k \alpha_i E^i, & \sigma(E) &= \sum_{i=0}^k \beta_i E^i, \\ \hat{\rho}(E) &= \sum_{i=0}^k \hat{\alpha}_i E^i, & \hat{\sigma}(E) &= \sum_{i=0}^k \hat{\beta}_i E^i. \end{aligned}$$

であり,  $E$  は  $Ey_n = y_{n+1}$  と定義されている. 上の 2 つの式から  $y_{n+s}$  を消去すれば,

$$\{\rho(E) - h\lambda\sigma(E) - h\lambda\gamma\{\hat{\rho}(E) + h\lambda\hat{\sigma}(E)\}\} y_n = 0$$

が成立することから, 特性多項式は

$$\pi_\lambda(z) = h\lambda\gamma\{\hat{\rho}(E) + h\lambda\hat{\sigma}(E)\} y_n$$

として得られる. このとき  $\pi_\lambda(z) = 0$  の解  $z$  が  $|z| < 1$  を満たすならスキム (ODE) は絶対安定である. 一般化線形多段法には 1 段 3 次 ( $s \geq 1/2$ ), 4 次 ( $s = 1/2$ ) 公式が存在し, その係数は表 1 に示す.

## 2.2 一般化線形多段法の積分-微分方程式への適用

積分-微分方程式 (VIDE) を解くために一般化線形多段法の公式 (3) を微分方程式系 (2) に適用することによって, つぎのスキム (VIDE) が得られる.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} &= h \sum_{i=0}^k \beta_i F(x_{n+i}, y_{n+i}, v_{n+i}^{n+s}) + h\gamma F(x_{n+s}, y_{n+s}, v_{n+s}^{n+s}) \\ y_{n+s} &= \sum_{i=0}^k \hat{\alpha}_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^k \hat{\beta}_i F(x_{n+i}, y_{n+i}, v_{n+i}^{n+s}) \\ v_{n+s}^{n+s} &= \sum_{i=0}^k \hat{\alpha}_i v_{n+i}^{n+s} + h \sum_{i=0}^k \hat{\beta}_i K(x_{n+s}, x_{n+i}, y_{n+i}) \\ \begin{cases} \sum_{i=0}^k \alpha_i v_{m+i}^{n+k} &= h \sum_{i=0}^k \beta_i K(x_{n+k}, x_{m+i}, y_{m+i}) + h\gamma K(x_{n+k}, x_{m+s}, y_{m+s}) \\ \sum_{i=0}^k \alpha_i v_{m+i}^{n+s} &= h \sum_{i=0}^k \beta_i K(x_{n+s}, x_{m+i}, y_{m+i}) + h\gamma K(x_{n+s}, x_{m+s}, y_{m+s}), \end{cases} \quad m = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

ここで,  $v_{m+p}^{n+q}$  は

$$v_{m+p}^{n+q} \simeq v(x_{m+p}) = \int_{x_0}^{x_{m+p}} K(x_{n+q}, t, y(t)) dt$$

に相当し, 1 ステップ進むごとに  $p=0$  から  $n$  まで積分計算を進めることを意味する.

### 3 数値的安定性

スキム (VIDE) の安定性を解析するために線形積分-微分方程式

$$y'(x) = (\lambda + \mu)y(x) - \lambda\mu \int_{x_0}^x y(s)ds, \quad (\lambda, \mu) \in C^2$$

をテスト方程式として用いる.

**定義 1** 積分-微分方程式の解が任意の初期値  $y_0$  に対して  $y(x) \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow \infty$ ) を満たすとき, 方程式は漸近安定であるという. ■

**定義 2** テスト方程式が漸近安定となる  $(\lambda, \mu) \in C^2$  の集合を絶対安定領域と呼び, これを  $R_A$  とかく. ■

**補題 1** テスト方程式が漸近安定であるための必要十分条件は  $\operatorname{Re}\lambda < 0, \operatorname{Re}\mu < 0$  である. ■

この補題は, テスト方程式と等価な 2 階常微分方程式系を考察することにより明らかである.

次に解法の安定性をつぎのように定義する. ある数値解法をテスト方程式に適用したとき, その数値解  $y_n$  が  $y_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を満たすならば, その解法は絶対安定であるという. この定義のもとで, つぎの 2 つの安定性の概念を導入する.

**定義 3** 数値解法が絶対安定となる  $(\lambda, \mu) \in C^2$  の集合  $R_{GA}$  が  $R_A \subset R_{GA}$  を満たすとき, その解法は A 安定であるという. ■

**定義 4** ある有限な  $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$  があって, 数値解法により得られる絶対安定領域  $R_{GA}$  が  $R_{GA} \subset R_{AR} \cap R_{AI}$  を満たすなら, その解法は Stiff 安定であるという. ここで  $R_{AR} = \{(z_1, z_2) \in C^2 \mid \operatorname{Re}z_1 < 0, \operatorname{Re}z_2 < 0\}$ ,  $R_{AI} = \{(z_1, z_2) \in C^2 \mid |\operatorname{Im}z_1| > \theta_1, |\operatorname{Im}z_2| > \theta_2\}$ . ■

この定義において,  $\theta_1, \theta_2$  が  $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0$  なら  $R_{GA}$  は  $R_A$  と一致する.

### 4 安定性解析

線形積分-微分方程式のテスト方程式に対してスキム (VIDE) は

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} &= h \sum_{i=0}^k \beta_i ((\lambda + \mu)y_{n+i} - \lambda\mu v_{n+i}^{n+i}) \\ y_{n+s} &= \sum_{i=0}^k \hat{\alpha}_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^k \hat{\beta}_i ((\lambda + \mu)y_{n+i} - \lambda\mu v_{n+i}^{n+i}) \\ v_{n+s}^{n+s} &= \sum_{i=0}^k \hat{\alpha}_i v_{n+i}^{n+s} + h \sum_{i=0}^k \hat{\beta}_i y_{n+i} \\ \begin{cases} \sum_{i=0}^k \alpha_i v_{m+i}^{n+k} &= h \sum_{i=0}^k \beta_i y_{m+i} + h\gamma y_{m+s} \\ \sum_{i=0}^k \alpha_i v_{m+i}^{n+s} &= h \sum_{i=0}^k \beta_i y_{m+i} + h\gamma y_{m+s} \end{cases} \quad (m = 0, 1, \dots, n) \end{aligned}$$

のように書ける. 特にテスト方程式は  $K(x, s, y(s)) = y(s)$  であるため, 上のスキム内の後半 2 式は一致し, 統一して

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i v_{m+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i y_{m+i} + h\gamma y_{m+s} \quad (m = 0, 1, \dots, n)$$

と整理できる. シフト作用素を用いてこのスキムを表現すれば,

$$\begin{cases} \rho(E)y_n &= h(\lambda + \mu)(\sigma(E)y_n + \gamma y_{n+s}) - h\lambda\mu(\sigma(E)v_n + \gamma v_{n+s}) \\ y_{n+s} &= \hat{\rho}(E)y_n + h(\lambda + \mu)\hat{\sigma}(E)y_n - h\lambda\mu\hat{\sigma}(E)v_n \\ v_{n+s} &= \hat{\rho}(E)v_n + h\hat{\sigma}(E)y_n \\ \rho(E)v_n &= h\sigma(E)y_n + h\gamma y_{n+s} \end{cases}$$

となり, さらにこれらの式から  $y_{n+s}, v_{n+s}$  の項を消去すれば齊次方程式系

$$\begin{pmatrix} -hB(E) & A(E) \\ A(E) - (\lambda + \mu)hB(E) & \lambda\mu hB(E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_n \\ v_n \end{pmatrix} = 0$$

が得られる. ここで  $A(E) = \rho(E) + \lambda\mu h^2 \gamma \hat{\sigma}(E)$ ,  $B(E) = \sigma(E) + \gamma \hat{\rho}(E) + (\lambda + \mu)h\gamma \hat{\sigma}(E)$ . この系が自明でない解を持つためには  $y_n = az^n, v_n = bz^n$  ( $a, b \in \mathbb{C}$ ) を代入して得られる  $a, b$  に関する齊次方程式の係数行列の行列式が零になることが必要十分である. すなわち  $z$  がつぎの多項式のゼロ点となることが必要十分である.

$$\pi(z, \lambda h, \mu h) = \pi_\lambda(z) \pi_\mu(z)$$

ここで  $\pi(z, \lambda h, \mu h)$  をスキム (VIDE) の特性多項式と呼ぶことにする. また,  $\pi_\lambda, \pi_\mu$  は次のように定義されている.

$$\begin{cases} \pi_\lambda(z) = A(z) - \lambda h B(z) = \rho(z) - \lambda h \{ \sigma(z) + \gamma \hat{\rho}(z) + \lambda h \gamma \hat{\sigma}(z) \} \\ \pi_\mu(z) = A(z) - \mu h B(z) = \rho(z) - \mu h \{ \sigma(z) + \gamma \hat{\rho}(z) + \mu h \gamma \hat{\sigma}(z) \} \end{cases}$$

$\pi_\lambda(z)$  と  $\pi_\mu(z)$  の対称性より  $\pi(z, \lambda h, \mu h) = 0$  の考察は  $\pi_\lambda(z) = 0$  または  $\pi_\mu(z) = 0$  のいずれかを考えれば分かる. したがって, 例えば  $\pi_\lambda(z) = 0$  の解  $z$  が  $|z| < 1$  となると, スキム (VIDE) の安定性は保証される.

スキム (VIDE) の特性多項式を解析することにより以下の結果を得る.

**定理 1** 常微分方程式の初期値問題に対して A-安定な一般化線形多段法は積分-微分方程式に対しても A-安定である.

**証明** スキム (ODE) とスキム (VIDE) の特性多項式を比較することにより明らかである. ■

**定理 2** 積分-微分方程式に対する A 安定な  $O(h^4)$  と  $O(h^5)$  の局所打ち切り誤差を持つ一般化線形多段法が存在する.

**証明** 例えば表 1 の係数を持つ一般化線形多段法の公式について考える.

表 1 の係数をもつスキム (VIDE) の特性多項式の解析には

$$\pi_\lambda(z) = \frac{[sx^2 - 2(1+s)x + 6]z - [(1-s)x^2 + (4-2s)x + 6]}{6}, \quad (\lambda h = x (= u + iv))$$

のみを考えれば十分である.  $\pi_\lambda(z) = 0$  となるような  $z$  は

$$z = \frac{(1-s)x^2 + (4-2s)x + 6}{sx^2 - 2(1+s)x + 6}$$

であり,  $|z| < 1 \rightarrow \text{Re} w < 0$  ( $w \in \mathbb{C}$ ) となるように  $z$  平面を変換し,

$$w = \frac{z-1}{z+1} = \frac{2(-tx^2 + 3x)}{x^2 - 4tx + 12}$$

を得る. ここで  $t = s - \frac{1}{2}$  とする. 計算より

$$\frac{1}{2} \text{Re} w = u(36 + (4t^2 + 3)(u^2 + v^2)) - t((24 + u^2 + v^2)(u^2 + v^2))$$

を得る. 仮定より  $u < 0$  なので,  $\text{Re} w < 0 \Leftrightarrow t \geq 0 \Leftrightarrow s \geq \frac{1}{2}$  となり,  $s \geq \frac{1}{2}$  のとき, この解法は A 安定となる. 局所打ち切り誤差は  $s = \frac{1}{2}$  のとき  $O(h^5)$ , それ以外の  $s$  では  $O(h^4)$  となる [3]. ■

また, Lambert [1] らの解析手法に基づいて, これらの一般化線形多段法と既存の方法の安定領域を比較した図をつぎに示す. 横軸が  $\pi_\lambda(z)$ , 縦軸が  $\pi_\mu(z)$  で, 左の図が実部, 右の図が虚部を示し, 斜線部分が安定領域である. なお A 安定の場合には, 図の実部における第 3 象限の領域と虚部の全部が安定領域である.

既存の方法で最も単純なものは Euler 公式 (図 1) である.

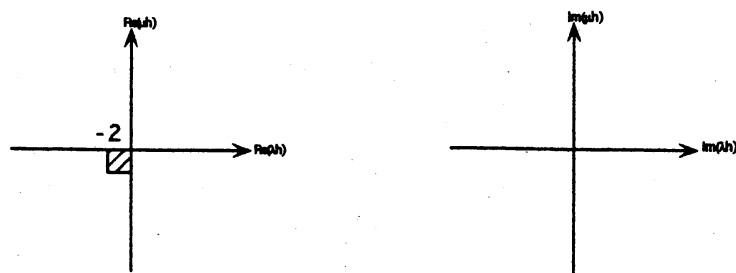


図 1 : Euler 公式 ( 1 次 ) の安定領域

Euler 公式は不安定なので, 陰的な後退 Euler 公式を利用すると A 安定を得る (図 2) . しかし近似精度は良くない.

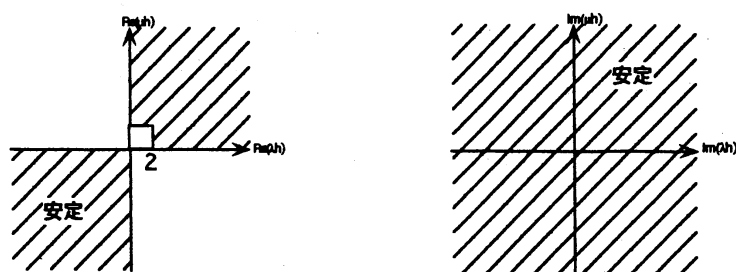


図 2 : 後退 Euler 公式 ( 1 次 ) の安定領域

つぎの台形公式では A 安定性を得る (図 3) .

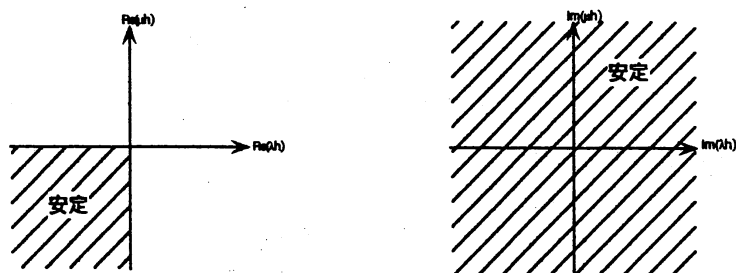


図 3 : 台形公式 ( 2 次 ) の安定領域

以上の既存の方法に対して, 本公式は 1 段公式で既に 4 次までの近似精度をもちながら A 安定性をも得られる (図 4) .

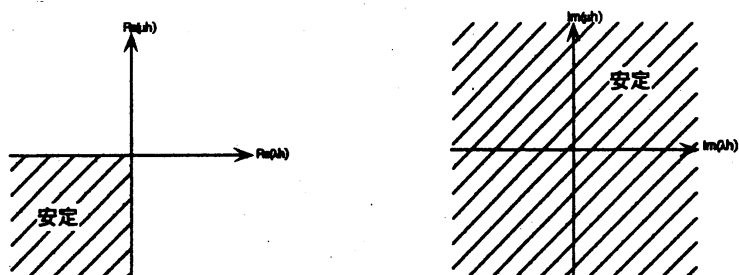


図 4 :  $s = \frac{1}{2}$  の 1 段 4 次公式の安定領域 ( $s \geq \frac{1}{2}$ )

以上のように、既存の方法では A 安定な公式は 2 次が限界であるが、一般化線形多段法を用いることにより 1 段公式で A 安定な 3 次、4 次公式を実現できる。

また、Stiff 安定な公式に対してつぎの結果を得る。

**定理 3** 積分-微分方程式に対する Stiff 安定な 2 段と 3 段の一般化線形多段法の公式が存在し、それぞれ  $O(h^6)$  と  $O(h^8)$  の局所打ち切り誤差を持つ。■

**証明** 各公式の係数をつぎの表 2, 表 3 に示す。2 段公式は  $s$  が  $s_0 = \frac{3+\sqrt{6}}{3} \simeq 1.81$  を越える値を取るとき、3 段公式は  $s$  が  $s_0 = \frac{15+\sqrt{205}}{10} \simeq 2.93$  を越える値を取るとき、いずれも Stiff 安定な公式となることが容易に示される。局所打ち切り誤差については [3] を参照のこと。■

安定領域の図をつぎの図 5, 図 6 に示す。

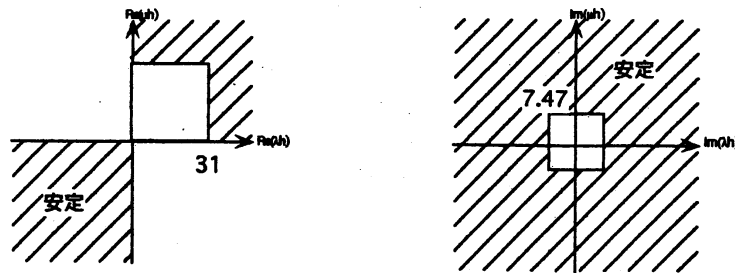


図 5:  $s = 1.9$  の 2 段 5 次公式の安定領域 ( $s > 1.81$  なら Stiff 安定)

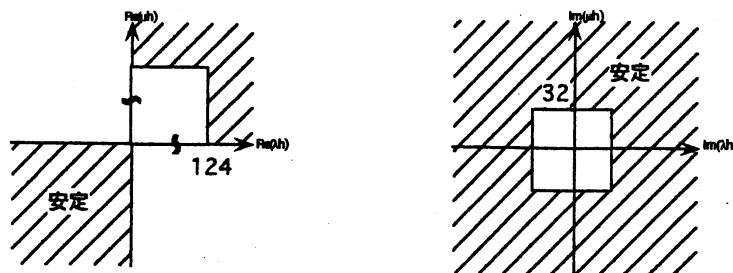


図 6:  $s = 2.95$  の 3 段 7 次公式の安定領域 ( $s > 2.93$  なら Stiff 安定)

実部の図では安定領域が負の全領域をカバーするとともに、虚部の図では原点周りの一部を除いて全領域をカバーすることが Stiff 安定の特徴である。

## 5 数値例

本アルゴリズムの有効性をいくつかの典型的な方程式を用いて検証する。数値実験に用いたスキームは 1 段 4 次公式 ( $s = \frac{1}{2}$ ) であり、出発手続には 4 段 4 次 Runge-Kutta 公式を用いた。

例 1: 下記は Linz [2] からの問題であり、厳密解は  $y(x) = e^{x^2}$  である。

$$\begin{aligned} y'(x) &= 1 + 2x - y(x) + \int_0^x x(1+2t)e^{t(x-t)}y(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

本 1 段公式に基づく数値結果をつぎに示す。

	絶対最大誤差
$h = 0.3$	$4.9537 \times 10^{-4}$
$h = 0.1$	$9.2664 \times 10^{-6}$
$h = 0.01$	$9.3824 \times 10^{-10}$

Linz はこの問題に対して Simpson 則にに基づく解法と Adams 法に基づく解法を適用し,  $h = 0.1$  においてそれぞれ  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  程度の誤差を持つ数値解を得ている. 一方, 本方法では 3 倍の刻み幅で  $10^{-4}$  程度の誤差を持つ解が得られる.

例 2: つぎは同じく Linz [2] からの問題であり, 厳密解は  $y(x) = x$  である.

$$\begin{aligned} y'(x) &= 1 + y(x) - xe^{-x^2} - 2 \int_0^x te^{-y^2(t)} dt, \quad 0 \leq x \leq 2 \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

本 1 段公式に基づく数値結果をつぎに示す.

	絶対最大誤差
$h = 0.3$	$8.5793 \times 10^{-5}$
$h = 0.1$	$1.5890 \times 10^{-6}$
$h = 0.01$	$1.5653 \times 10^{-10}$

Linz は先程と同様の手法を用いて, それぞれ  $10^{-5}$ ,  $10^{-4}$  程度の誤差を持つ数値解を得ている. 一方, 本方法では 3 倍の刻み幅で  $10^{-5}$  程度の誤差を持つ解が得られる.

例 3: つぎは McKee [5] からの問題であり, 厳密解は  $y(x) = e^{-x}$  である.

$$\begin{aligned} y'(x) &= -\sin(x) - \cos(x) + 2 \int_0^x \cos(x-t)y(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 2 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

本 1 段公式に基づく数値結果をつぎに示す.

	絶対最大誤差
$h = 0.7$	$3.6129 \times 10^{-3}$
$h = 0.1$	$3.2570 \times 10^{-6}$
$h = 0.01$	$3.2602 \times 10^{-10}$

McKee はサイクリック多段法により  $h = 0.1$  に対して  $10^{-3}$  程度の,  $h = 0.01$  に対して  $10^{-6}$  程度の誤差を持つ数値解を得ている. 一方, 本方法では 7 倍の刻み幅で  $10^{-3}$  程度の誤差を持つ解が得られる.

## 6 おわりに

本資料において積分-微分方程式に一般化線形多段法を適用し, 高次安定なスキムを構成した. 計算量とスキムの複雑さを度外視すれば, このスキムは解析結果により Lambert [1] らによる既存の方法よりも精度と安定性に関して優れている. 具体的には A 安定な 1 段 3 次, 1 段 4 次公式を構成し, さらに Stiff 安定と称する新たな安定性の概念を積分-微分方程式の解法に導入することにより, 2 段 5 次, 3 段 7 次 Stiff 安定公式を得た. また, 本アルゴリズムの有効性の検証のために幾つかの数値実験を行い, 既存の方法より精度が向上していることを数値的に確認した.

本資料での安定性解析は最も易しいスカラーの線形積分-微分方程式をテスト方程式として用いた. しかし, 今後本スキムの実用化を考えると, さらに進んだ次のような安定解析を試みる必要がある.

- i) より広範な積分-微分方程式を対象とすると, 線形でも良いが合成積を有する積分核を持つようなテスト方程式に対する安定性の解析が必要である.
- ii) 本スキムは積分-微分方程式系にも素直な形で適用できる. その場合に安定性解析のテスト方程式として, 方程式系を用いて行う必要がある.

これらの安定性解析は今後の課題である.



## 参考文献

- [1] Lambert & Brunner : *Stability of Numerical Methods for VIDE*, Computing, Vol.12, 1974, pp.75-89
- [2] Linz : *Linear multistep methods for VIDE*, J. ACM., Vol.16, 1969, pp. 295-301
- [3] 山本, 萩原, 鈴木 : 常微分方程式の初期値問題に対する一般化線形多段法の安定性について, 第26回数値解析シンポジウム, pp.15-18
- [4] Matthys : *A-Stable Linear Multistep Methods for VIDE*, Numer. Math., Vol.27, 1976, pp. 85-94
- [5] McKee : *Cyclic multistep methods for solving VIDE*, J. SIAM, Numer. Anal., Vol.17, 1976, pp.106-114
- [6] Baker, et al. : *Regions of stability in the numerical treatment of VIDE*, J. SIAM, Numer. Anal., Vol.16, 1979, pp.890-910

## 一般化線形多段法の公式係数表

一般化線形多段法の各  $k$  段 公式 ( $k=1\sim 3$ ) の係数をつぎに示す.

表 1 : 1 段公式の係数

$\alpha_0 = -1$	$\alpha_1 = 1$
$\beta_0 = (3s-1)/(6s)$	$\beta_1 = (3s-2)/(6s-6)$
$\gamma = 1/(6s-6s^2)$	
$\hat{\alpha}_0 = (1-s)^2(2s+1)$	$\hat{\alpha}_1 = s^2(3-2s)$
$\hat{\beta}_0 = s(1-s)^2$	$\hat{\beta}_1 = s^2(s-1)$

ここで ( $s \geq 1/2$ ) である.

表 2 : 2 段公式の係数

$\alpha_0 = (23-15s)/t$	$\alpha_1 = -16/t$	$\alpha_2 = 1$
$\beta_0 = (5s^2-9s+2)/(st)$	$\beta_1 = 4(5s^2-10s+4)/((s-1)t)$	$\beta_2 = (5s^2-11s+4)/((s-2)t)$
$\gamma = -4/(s(s-1)(s-2)t)$		
$\hat{\alpha}_0 = (s-1)^2(s-2)^2(3s+1)$	$\hat{\alpha}_1 = s^2(s-2)^2$	$\hat{\alpha}_2 = s^2(s-1)^2(7-3s)/4$
$\hat{\beta}_0 = s^2(s-1)(s-2)^2/4$	$\hat{\beta}_1 = s^2(s-1)(s-2)^2$	$\hat{\beta}_2 = s^2(s-1)^2(s-2)/4$

ここで ( $s > s_0 (\simeq 1.81), t = 15s - 7$ ) である.

表 3 : 3 段公式の係数

$\alpha_0 = (-77s^2 + 312s - 291)/t$	$\alpha_1 = 27(18-7s)s/t$
$\alpha_2 = 27(s-3)(7s-3)/t$	$\alpha_3 = 1$
$\beta_0 = 3(7s^3 - 30s^2 + 33s - 6)/(st)$	$\beta_1 = 27(7s^3 - 31s^2 + 38s - 12)/((s-1)t)$
$\beta_2 = 27(7s^3 - 32s^2 + 41s - 12)/((s-2)t)$	$\beta_3 = 3(7s^3 - 33s^2 + 42s - 12)/((s-3)t)$
$\gamma = -108/(s(s-1)(s-2)(s-3)t)$	
$\hat{\alpha}_0 = (11s+3)(s-1)^2(s-2)^2(s-3)^2/108$	$\hat{\alpha}_1 = s^3(s-2)^2(s-3)^2/4$
$\hat{\alpha}_2 = -s^2(s-1)^2(s-3)^3/4$	$\hat{\alpha}_3 = s^2(s-1)^2(s-2)^2(36-11s)/108$
$\hat{\beta}_0 = s(s-1)^2(s-2)^2(s-3)^2/36$	$\hat{\beta}_1 = s^2(s-1)(s-2)^2(s-3)^2/4$
$\hat{\beta}_2 = s^2(s-1)^2(s-2)(s-3)^2/4$	$\hat{\beta}_3 = s^2(s-1)^2(s-2)^2(s-3)/36$

ここで ( $s > s_0 (\simeq 2.93), t = 77s^2 - 150s + 48$ ) である.